TOPSIS فازی و کلاسیک

چکیده: روش Topsis یکی از فنون تصمیم‌گیری چند معیاره می‌باشد که کاربرد بسیار زیادی در زمینه تصمیم‌گیری دارد. در این مقاله ما ابتدابه بیان اعداد و مجموعه‌های فازی می‌پردازیم و سپس خصوصیات آنها را نیز تشریح می‌کنیم، سپس به مقایسه و تشریح گام‌های Topsis فازی و کلاسیک می‌پردازیم.

لغات کلیدی: مجموعه‌های فازی – Topsis فازی - Topsis کلاسیک

مقدمه:

تصمیم گیری چند معیاره به عنوان یک علم دارای مفاهیم و متدهای خاص خود است و به تصمیم گیرنده در شناسایی ، توصیف و ارزیابی گزینه ها کمک نموده تا گزینه ها را رتبه بندی ،گروه بندی و یا انتخاب نماید .این دسته از متد ها فضای تصمیم را گسسته تصور می کنند .هر چند که برای این مسائل جواب بهینه وجود ندارد اما با وجود گزینه های محدود از پیش تعیین شده ،هدف مسئله انتخاب گزینه برتر بر اساس شاخص های چند گانه است (Yang .J.B , Wang .Y.M, Xu. D.L, Chin. K.S,2006) مجموعه فازی برای اولین بار توسط فردی به نام زاده معرفی شد. Shuo-Yan , Chang .Yao-Hui ,Chun-Shen .Ying Chou,2007) مجموعه فازی چهار چوب وسیع‌تری نسبت به مجموعه کلاسیک ارائه می‌دهد و توانایی بیشتری در بازتاب مسائل دنیای واقعی دارد. (Ertugrul .Irfan, Karakasoglu .Nilsen,2007)

پیشینه تحقیق:

تا کنون محققان زیادی از فنون تصمیم‌گیری چند معیاره از جمله تاپسیس چه به صورت فازی و چه کلاسیک در تصمیم‌گیری‌های مختلف استفاده کرده‌اند.از جمله می‌توان به تصمیم‌گیری در مورد انتخاب پروژه

(Mahmoodzadeh .S, Shahrabi. J, Pariazar. M, and Zaeri. M. S,2006) ،

مکان یابی برای ایجاد واحدهای صنعتی (Yang.Taho,Hung. chih-ching, 2007)، انتخاب تأمین‌کننده بلند مـدت (onut.s , kara . s.s , Isik . E , 2008)، ارزیـابی عملکـرد کارکنـان (Ertugrul . Irfan , karakasoglu. Nilsen 2007)، ارزیـابی کیفیـت خـدمات هـوایی(Tasur . S.H ,Chang. T.Y , Yen . C.H , 2002)، طراحـی محصولات مطابق میل مشتری (Lin , M.C , Wang . C.C , Chen. M.S , Chang , 2007)اشاره کرد. همچنین در مورد اعداد فازی نیز لازم به ذکر است که فردی به نام Zadeh برای اولین بار و در سال ۱۹۵۶ و در ارتباط با ابهام انسان مجموعه فازی و اعداد فازی را پیشنهاد کرد. Shuo-Yan , Chang .Yao-Hui ,Chun-Shen .Ying Chou,2007)

اعداد و مجموعه‌های فازی

مجموعه فازی یک شکل توسعه یافته از مجموعه قطعی است، مجموعه‌های قطعی حالت (۰ و ۱) دارند به عنوان مثال بلی یا خیر، اجازه می‌دهد یا اجازه نمی‌دهد. یک مجموعه قطعی عضو بودن یا نبودن را به خوبی و به روشنی مشخص می‌کنـد امـا در دنیـای واقعـی بسـیاری از وقـایع را نمـی‌تـوان بـا اسـتفاده از مجموعه کلاسیک تشریح کرد. به عنوان مثال ممکن است پاسخ‌دهنده در پاسخ به ایـن سـوال کـه هـوا چطور است اینگونه پاسخ دهد که نسبتاً گرم است. اصطلاحاتی از قبیل نه چندان واضح، احتمالاً، نسـبتاً مشابه در زندگی روزمره اغلب به گوش می‌خورند و اغلب با عدم قطعیت همراه هستند، مجموعه فـازی در مقایسه با مجموعه‌های کلاسیک چهار چوب وسیع‌تری را ارائه می‌دهد و توانایی بیشتری در بازتـاب مسائل دنیای واقعی دارد. و به طور خلاصه می‌توان گفت یک مجموعه فازی ابـزار مناسـبی بـرای مـدل کردن پدیده‌های دارای ابهام می‌باشد. به عنوان مثال کاملاً غیر عضو برابر، کاملاً عضو برابر با ۱ و اعداد بین ۰ و ۱ نیز طبقه میانی اعضاء را نشان می‌دهد.(Ertugrul . Irfan , karakasoglu. Nilsen ,2007)

مجموعه‌های فازی به وسیله تابع عضویت تعریف می‌شوند. مجموعه فازی طبقه (grade) هر عنصـر x از X که به طور غیر قطعی (partial) عضو A است را نشان می‌دهد و رتبه هر عنصر از مجموعه بین ۰ و۱ تعریف می‌شـود. اگ‌ر عنصر x به طور واضح متعلق به A باشد برابر با **یـک** و اگـر به طور واضح و روشن متعلق به A نباشدبرابر **صفر** می‌باشد. (onut.s , kara . s.s , Is $\mu_{\tilde{A}}(x)$)08

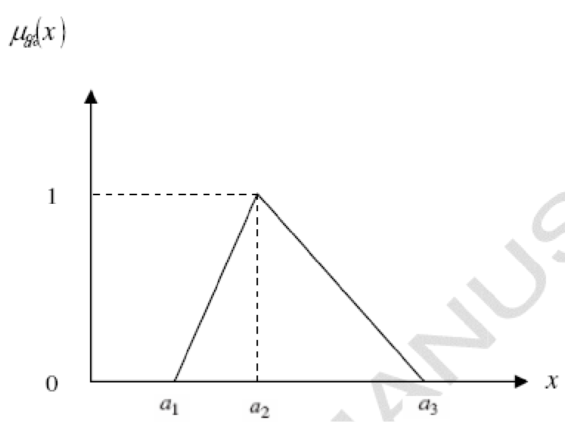
اعداد فازی می‌توانند به صورت مثلثی و یا ذوزنقه ای تعریف شوند. اعـداد فـازی مثلثـی: اعـداد فـازی مثلثی به صورت (a۳ و a۲ و a۱) بیـان مـی‌شـوند، پارامترهـای a۳ و a۲ و a۱ بـه ترتیـب کـوچکترین مقـدار ممکن، مقدار امید بخش و بزرگترین مقدار ممکن را شرح می‌دهند.

تابع عضویت یک عدد مثلثی به صورت زیر نشان داده می‌شود.

$$\mu_{\tilde{a}}(x)=\begin{cases} 0, & x \le a_1 \\ \dfrac{x-a_1}{a_2-a_1}, & a_1 < x \le a_2 \\ \dfrac{a_3-x}{a_3-a_2}, & a_2 < x \le a_3 \\ 0, & x > a_3. \end{cases}$$

نمودار شماره ۱ نیز یک عدد فازی مثلثی را نشان می‌دهد.

(Mahdavi. Iraj, Mahdavi-Amiri. Nezam, Heidarzade .Armaghan, Nourifar. Rahele,2008)



نمودار شماره ۱ : یك عدد مثلثی

اعداد فازی ذوزنقه‌ای :

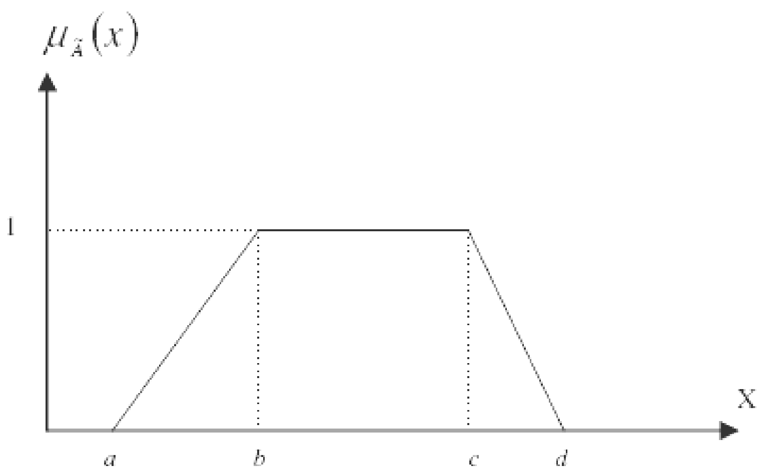
اعداد ذوزنقه‌ای نیز به صورت زیر می‌باشد. $\widetilde{A}=(a,b,c,d)$ یک عدد فازی ذوزنقه‌ای می‌باشد.

و رابطه روبرو نیز برقرار است $a<b<c<d$

و تابع عضویت آن نیز به صورت زیر نشان داده می‌شود.

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}\frac{(x-a)}{(b-a)}, & a\leqslant x\leqslant b,\\ 1, & b\leqslant x\leqslant c,\\ \frac{(x-d)}{(c-d)}, & c\leqslant x\leqslant d,\\ 0, & \text{otherwise,}\end{cases}$$

نمودار شماره ۲ یک عدد فازی ذوزنقه‌ای را نشان می‌دهد.



نمودار شماره ۲ : یك عدد ذوزنقه ای

عملیات مختلفی روی اعداد فازی صورت می‌گیرد که در اینجا چند نمونه از آن اشاره می‌کنیم. دو عدد فازی $\widetilde{A}=(a,b,c,d)$ و $\widetilde{B}=(e,f,g,h)$ و عدد قطعی K را در نظر بگیرید.

۱- جمع دو عدد فازی

$$\widetilde{A} \oplus \widetilde{B} = (a+e, b+f, c+g, d+h), \quad a \geqslant 0,\ e \geqslant 0$$

۲- ضرب دو عدد فازی

$$\widetilde{A} \otimes \widetilde{B} = (ae, bf, cg, dh), \quad a \geqslant 0,\ e \geqslant 0$$

۳- ضرب یک عدد قطعی در یک عدد فازی

$$k \otimes \widetilde{A} = (ka, kb, kc, kd), \quad a \geqslant 0,\ k \geqslant 0.$$

۴- تقسیم دو عدد فازی

$$\widetilde{A}/\widetilde{B} = \left(\frac{a}{h}, \frac{b}{g}, \frac{c}{f}, \frac{d}{e}\right), \quad a \geqslant 0,\ e \geqslant 0.$$

۵- تقسیم یک عدد قطعی بر روی یک عدد فازی

$$k/\widetilde{A} = \left(\frac{k}{d}, \frac{k}{c}, \frac{k}{b}, \frac{k}{a}\right), \quad a \geqslant 0,\ k \geqslant 0.$$

۶- تقسیم عدد فازی بر روی یک عدد قطعی

$$\widetilde{A}/k = \left(\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, \frac{c}{k}, \frac{d}{k}\right) = \frac{1}{k} \otimes \widetilde{A}, \quad a \geqslant 0,\ k \geqslant 0.$$

علاوه بر موارد فوق روابط زیر بر قرار است

.Shuo-Yan , Chang .Yao-Hui ,Chun- Shen .Ying Chou,2007

if $k \geqslant 0, a \geqslant 0, e \geqslant 0.$

$$\widetilde{A} \oplus \widetilde{B} = \widetilde{B} \oplus \widetilde{A},$$
$$k \oplus \widetilde{A} = \widetilde{A} \oplus k,$$
$$\widetilde{A} \otimes \widetilde{B} = \widetilde{B} \otimes \widetilde{A},$$

متغیرهای کلامی برای اعداد فازی مثلثی به صورت زیر بیان می‌شوند.

(Mahdavi. Iraj, Mahdavi-Amiri. Nezam, Heidarzade .Armaghan, Nourifar. Rahele,2008)

متغیرهای کلامی برای رتبه بندی گزینه‌ها بر اساس شاخص‌ها	
خیلی ضعبف	(0; 0; 1)
ضعیف	(0; 1; 3)
نسبتا ضعیف	(1; 3; 5)
متوسط	(3; 5; 7)
نسبتاً خوب	(5; 7; 9)
خوب	(7; 9; 10)
خیلی خوب	(9; 10; 10)

متغیرهای کلامی برای بیان اهمیت معیار	
خیلی کم	(0; 0; 0.1)
کم	(0; 0.1; 0.3)
نسبتا کم	(0.1; 0.3; 0.5)
متوسط	(0.3; 0.5; 0.7)
نسبتاً زیاد	(0.5; 0.7; 0.9)
زیاد	(0.7; 0.9; 1.0)
خیلی زیاد	(0.9; 1.0; 1.0)

متغیرهای کلامی برای اعداد فازی ذوزنقه‌ای نیز به صورت زیر بیان می‌شود.

(.Shuo-Yan , Chang .Yao-Hui ,Chun- Shen .Ying Chou,2007)

متغیرهای کلامی برای رتبه بندی گزینه‌ها بر اساس شاخص‌ها	
خیلی ضعبف	
ضعیف	

متغیرهای کلامی برای بیان اهمیت معیار	
خیلی کم	
کم	
متوسط	(0,0,0,3)
زیاد	(0,3,3,5)
	(3,5,5,8)

$(0,0,0,20)$
$(0,0,20,40)$
$(0,20,20,40)$
$(0,20,50,70)$
$(30,50,50,70)$
$(30,50,80,100)$
$(60,80,80,100)$
$(60,80,100,100)$
$(80,100,100,100)$

Topsis فازی

تا اینجا به بعضی از تعریف مهم در مورد مجموعه‌های فازی اشاره شد. قبل از تشریح گام‌های Topsis فازی به بیان ۲ رابطه می‌پردازیم.

رابطه (۱) : و $\tilde{a}=(a_1, a_2, a_3)$:و عد $\tilde{b}=(b_1, b_2, b_3)$ د

فاصله بین آنها به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$d(\tilde{a},\tilde{b})=\sqrt{\frac{1}{3}[(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2]}$$

مسأله به صورت زیر بیان می‌شود

I یک مجموعه از $\tilde{J}$ گزینه ممکن که به صورت $A=[A_1,A_2,\ldots,A_j]$ نشان داده می‌شود.

II. یک مجموعه از n معیار که به صورت $C=[C_1,C_2,\ldots C_i]$ نشان داده می‌شود.

III. یک مجموعه از رتبه بندی گزینه‌ها $A_j\ (j=1,2,3,\ldots J)$ در ارتباط با معیار $C_i\ (i=1,2,3,\ldots n)$ که به صورت

$$\tilde{X}=\{\tilde{x}_{ij}, i=1,2,3,\ldots,n, j=1,2,3,\ldots,J\}.$$

نشان داده می‌شود.

IV. یک مجموعه از وزن‌های هر معیار که به صورت $W_i\ (i=1,2,3,\ldots n)$ نشان داده می‌شود. با توجه به موارد فوق ماتریس تقسیم‌گیری به صورت زیر نشان داده می‌شود.

$$\tilde{X}=\begin{bmatrix} \tilde{x}_{11} & \tilde{x}_{12} & \cdots & \tilde{x}_{1n} \\ \tilde{x}_{21} & \tilde{x}_{22} & \cdots & \tilde{x}_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \end{bmatrix}$$

رابطه ۲ – با در نظر گرفتن تفاوت در ارزش معیارها، ماتریس تصمیم‌گیری فازی نرمال موزون بر اساس رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\tilde{V} = [\tilde{v}_{ij}]_{n \times J} \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, J$$

بطوری که : $\tilde{v}_{ij} = \tilde{r}_{ij}(\cdot)w_i$

مراحل Topsis فازی به صورت زیر می‌باشد

گام ۱- تعیین رتبه کلامی هر گزینه در ارتباط با هر معیار به منظور به دست آوردن ماتریس تصمیم‌گیری زمان نیز شده که با نماد $\tilde{r}_{ij}$ نشان داده می‌شود

$$\tilde{r}_{ij} = \begin{cases} \tilde{x}_{ij}/\tilde{x}_j^* = \left(\frac{a_{ij}}{a_j^*}, \frac{b_{ij}}{b_j^*}, \frac{c_{ij}}{c_j^*}\right) \\ \tilde{x}_j^-/\tilde{x}_{ij} = \left(\frac{a_j^-}{a_{ij}}, \frac{b_j^-}{b_{ij}}, \frac{c_j^-}{c_{ij}}\right) \end{cases}$$

برای معیارهایی که مطلوبیت افزایشی دارند.

برای معیارهایی که مطلوبیت کاهشی دارند.

گام ۲- محاسبهٔ ماتریس موزون بهنجار $\tilde{V}ij$

$$\tilde{v}_{ij} = \tilde{r}_{ij}(\cdot)w_i$$

گام ۳- محاسبهٔ راه حل ایده آل مثبت A^+ و راه حل ایده آل منفی A^-

راه حل ایده آل مثبت و منفی Topsis فازی به صورت زیر نشان داده می‌شود.

$I=$ معیارهایی که مطلوبیت افزایشی دارند.

$$A^* = \{\tilde{v}_1^*, \ldots, \tilde{v}_i^*\} = \left\{\left(\max_j v_{ij} | i \in I\right)\right\}$$
$$i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, J$$
$$A^- = \{\tilde{v}_1^-, \ldots, \tilde{v}_i^-\} = \left\{\left(\min_j v_{ij} | i \in I\right)\right\}$$
$$i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, J$$

گام ۴- محاسبهٔ فاصله هر راه حل از راه حل ایده آل مثبت A^+ و راه حل ایده آل منفی با استفاده از روابط زیر :

$$D_j^* = \sum_{j=1}^{n} d(\tilde{v}_{ij}, \tilde{v}_i^*) \quad j = 1, 2, \ldots, J$$

$$D_j^- = sum_{j=1}^{n} d(\tilde{v}_{ij}, \tilde{v}_i^-) \quad j = 1, 2, \ldots, J$$

نکته : نحوهٔ محاسبهٔ فاصله دو عدد فازی در رابطه شماره ۱ توضیح داده شده است.

گام ۵- محاسبه نزدیکی (شباهت) به راه حل ایده آل بر اساس رابط زیر

$$CC_j = \frac{D_j^-}{D_j^* + D_j^-} \quad j = 1, 2, \ldots, J$$

گام ۶- رتبه بندی گزینه‌ها : گزینه‌ای که بیشترین CCj را دارد اولویت اول می‌باشد و به همین ترتیب مابقی گزینه‌ها را رتبه بندی می کنیم . (onut.s , kara . s.s , Isik . E , 2008)

Topsis کلاسیک :

مرحله ۱- تعیین رتبه کلامی هر گزینه در ارتباط با هر معیار به منظور به دست آوردن ماتریس تصمیم‌گیری

مرحله ۲- نرمالایز کردن ماتریس تصمیم‌گیری با استفاده از رابطه زیر

$$r_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^2}}, \quad i = 1, \ldots, m; \ j = 1, \ldots, n.$$

مرحله ۳- محاسبهٔ ماتریس بهنجار موزون بر اساس رابطه زیر

$$v_{ij} = w_j r_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m; \ j = 1, \ldots, n.$$

گام ۴- محاسبهٔ راه حل ایده آل مثبت و منفی به صورت زیر

J1 معیارهایی که مطلوبیت افزایشی دارند

J2 معیارهایی که مطلوبیت کاهشی دارند

$$\begin{aligned} A^* &= \left\{ v_1^*, v_2^*, \ldots, v_j^*, \ldots, v_n^* \right\} \\ &= \{(\max_i v_{ij} | j \in J_1), (\min_i v_{ij} | j \in J_2) | i = 1, \ldots, m\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^- &= \left\{ v_1^-, v_2^-, \ldots, v_j^-, \ldots, v_n^- \right\} \\ &= \{(\min_i v_{ij} | j \in J_1), (\max_i vi_j | j \in J_2) | i = 1, \ldots, m\}, \end{aligned}$$

گام ۵- محاسبۀ فاصله هر گزینه از راه حل ایده آل مثبت:

$$S_i^* = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(v_{ij} - v_j^*\right)^2}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

$$S_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(v_{ij} - v_j^-\right)^2}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

گام ۶- محاسبۀ شباهت به راه حل ایده آل بر اساس رابطه زیر :

$$C_i^* = \frac{S_i^-}{S_i^* + S_i^-}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

بر اساس مقدار C_i^* گزینه‌ها را رتبه ب می‌کنیم به طوری که گزینه‌ای کـه بیشـترین C_i^* را دارد رتبـه اول و گزینه‌ای که کمترین C_i^* را دارد رتبه آ را به خود اختصاص می‌دهد.

(Yang .Taho , Hung. Chih-Ching ,2005)

نتیجه‌گیری :

Topsis یکی از رایج‌ترین فنون تصمیم‌گیری چند معیاره به حساب می‌آید و تصمیم گیرندگان را در امر انتخاب گزینه‌های صحیح یاری می‌کند وقتی که میزان ابهام زیاد می‌شود رویکـرد فـازی مـی‌توانـد کمک شایان توجهی برای مدیران جهت اخذ تصمیمات لازم در این شرایط باشد و تصـمیم گیرنـدگان میتوانند با استفاده از این تکنیک به ارزیابی ،رتبه بندی و انتخاب بهترین گزینه بپردازند .

منابع:

1-Yang .J.B , Wang .Y.M, Xu. D.L, Chin. K.S.,<< The evidential reasoning approach for MADA under both probabilistic and fuzzy uncertainties>>,European Journal of Operational Research (2006)

2- .Shuo-Yan , Chang .Yao-Hui ,Chun- Shen .Ying Chou.,<< A fuzzy simple additive weighting system under group decision-making for facility location selection with objective/subjective attributes >>European Journal of Operational Research,(2007)

3- Ertugrul .Irfan, Karakasoglu .Nilsen.,<< Performance evaluation of Turkish cement firms with fuzzy
analytic hierarchy process and TOPSIS methods>>, Expert Systems with Applications ,2007

4- Mahmoodzadeh .S, Shahrabi. J, Pariazar. M, and Zaeri. M. S.,<< Project Selection by Using Fuzzy AHP and
TOPSIS Technique >>, International Journal of Humanities and Social Sciences,(2006)

5- Onut.s , kara . s.s , Isik . E. ,<< Long term supplier selection using a combined fuzzy MCDM approach: A case study for a telecommunication company, Expert Systems with Applications , (2008)

6- Tasur . S.H ,Chang. T.Y , Yen . C.H , <<The evaluation of airline service quality by fuzzy MC>>,Tourism Management,(2002)

7- Lin , M.C , Wang . C.C , Chen. M.S , Chang. , << Using AHP and TOPSIS approaches in customer-driven product design process>>, Computers in Industry,(2007)

8-Mahdavi. Iraj, Mahdavi-Amiri. Nezam, Heidarzade .Armaghan, Nourifar. Rahele,<< Designing a Model of Fuzzy TOPSIS in Multiple Criteria Decision Making >>,Appl. Math. Comput.(2008)

9- Yang .Taho , Hung. Chih-Ching .,<< Multiple-attribute decision making methodsfor plant layout design problem>> Robotics and Computer-Integrated Manufacturing,(2005)