اعداد فازی

سه مجموعه‌ی فازی زیر را در نظر گرفته و مشخص کنید کدام یک اعداد فازی هستند.

$$A=\left\{\frac{0/2}{3},\frac{0/6}{4},\frac{1}{5},\frac{0/7}{6},\frac{0/1}{7}\right\}$$

$$B=\left\{\frac{0/3}{8},\frac{0/7}{9},\frac{0/8}{10},\frac{0/7}{11},\frac{0/9}{12}\right\}$$

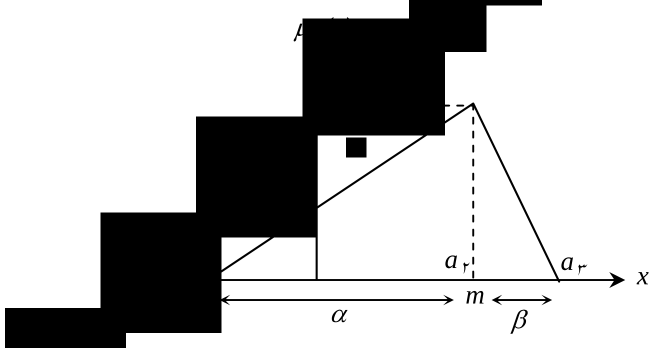
$$C=\left\{\frac{0/8}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{0/7}{6}\right\}$$

حل

مجموعه‌ی [redacted] است زیرا سه ویژگی مذکور را دارد. ولی مجموعه فازی B، عدد فازی نیست زیرا اولاً بهنجار نیست [redacted] از درجه‌ی عضویت ها برابر یک نیست)، ثانیاً محدب نیست (درجه‌ی عضویت عدد ۱۲ بیشتر از درجه‌ی [redacted] ۱۱ است). مجموعه‌ی C نیز عدد فازی نیست زیرا دارای دو نما است (درجه‌ی عضویت اعداد ۴ و [redacted]).

عدد فازی مثلثی

یکی از کاربردی ترین اعداد فازی ، [redacted]) است و به صورت $M=(m,\alpha,\beta)$ نشان داده می‌شود که در شکل زیر نمایش داده شده است. m [redacted] نما تا کرانه‌ی پایین و β فاصله‌ی نما تا کرانه‌ی بالا است.



شکل: عدد فازی مثلثی

(توجه: گاهی عدد فازی مثلثی را به صورت $M=(a_1,a_2,a_3)$ نیز نشان می‌دهند).

شکل ریاضی تابع عضویت نیز به صورت زیر است:

$$\mu_M(x)=\begin{cases}1-\dfrac{m-x}{\alpha}, & m-\alpha\le x\le m\\[2mm] 1-\dfrac{x-m}{\beta}, & m\le x\le m+\beta\\[2mm] 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

مثال [redacted] فازی مثلثی

عد[redacted] $M=(m,\alpha,\beta)=(5$ را به صورت $M=(a_1,a_2,a_3)$ بنویسید.

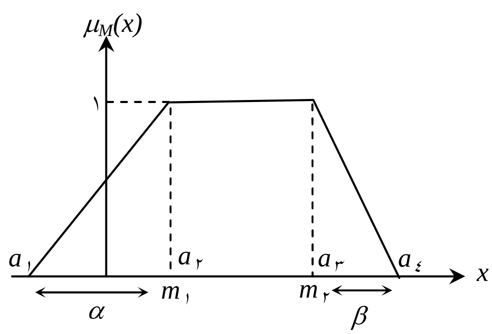
حل [redacted]

$a_1=m-\alpha=5-2=3, a_2=m=5, a_3=m+\beta=$ [redacted] $M=(3,5,12)$

عدد فازی ذوزنقه‌ای

اگر در تعریف عدد فازی، [redacted] نمایی بودن را حذف کنیم، آن‌گاه به آن بازه‌ی فازی گوییم. به عبارت دیگر در این حالت یک بازه وجود [redacted]ر طول این بازه، تابع عضویت برا بر یک است. با این تعریف، عدد فازی حالت خاصی از بازه‌ی فازی است. [redacted] را به تسامح عدد فازی ذوزنقه‌ای نیز می‌نامند.

فازی ذوزنقه‌ای را به صورت $({}_1, m_2,\alpha,\beta)$ [redacted]ی‌دهند (شکل زیر را ملاحظه کنید) که اگر $m_1=m_2$ باشد (و تابع عضویت به صورت خطی باشد) تبدیل به [redacted]لثی می‌شود (توجه: گاهی فازی ذوزنقه‌ای را به صورت $M=(a_1,a_2,a_3,a_4)$ نیز نشان می‌دهند).



شکل: عدد فازی ذوزنقه‌ای

عملگرهای ریاضی بر بازه‌ها و اعداد فازی

با توجه به این‌که محاسبات اعداد فازی مبتنی بر محاسبات بازه‌ها است (و هر عدد فازی حالت خاصی از بازه‌ی فازی است) ، در قسمت زیر برخی از عملگرهای اصلی بر اعداد فازی A وB،که به صورت بازه بیان شده‌اند ، آورده می‌شود.

به از[redacted] $b_1,$ و b_3 متعلق به اعداد حقیقی و $A=[a_1,a_3], B=[b_1,b_3]$:

۱) جمع : $A+B=[a_1,a_3]+[b_1,b_3]=[a_1+b_1\ ,\ a_3+b_3]$

۲) تفریق : $A-B=[a_1,a_3]-[b_1,b_3]=[a_1-b_3\ ,\ a_3-b_1]$

۳) ضرب : $A\times B=[a_1,a_3]\times[b_1,b_3]$

$=[a_1b_1\wedge a_1b_3\wedge a_3b_1\wedge a_3b_3\quad ,\quad a_1b_1\vee a_1b_3\vee a_3b_1\vee a_3b_3]$

۴) تقسیم: $A\div B=[a_1,a_3]\div[b_1,b_3]$

$=[\frac{a_1}{b_1}\wedge\frac{a_1}{b_3}\wedge\frac{a_3}{b_1}\wedge\frac{a_3}{b_3}\quad ,\quad \frac{a_1}{b_1}\vee\frac{a_1}{b_3}\vee\frac{a_3}{b_1}\vee\frac{a_3}{b_3}]$

۵) معکوس : $A^{-1}=[a_1,a_3]^{-1}=\left[\frac{1}{a_1}\wedge\frac{1}{a_3}\quad ,\quad \frac{1}{a_1}\vee\frac{1}{\ }\right.$ [redacted]

۶) ضرب یک اسکالر : $cA=c[a_1,a_3]=[ca_1\wedge ca$ [redacted] $\vee ca_3]$

توجه: اگر بازه‌های فوق مبتنی بر اعداد حقیقی مثبت ب[redacted]فرمول‌های ضرب، تقسیم و معکوس به صورت زیر ساده‌تر خواهند شد:

ضرب : $A\times B=[a_1,a_3]\times[b_1,$ [redacted] $a_3b_3]$

تقسیم : $A\div B=[a_1,$ [redacted] $\frac{a_3}{b_1}]$

معکوس : A [redacted] $\frac{1}{a_3},\frac{1}{a_1}]$

۷) مینم[redacted] $=\min([a_1,a_3],[b_1,b_3])=[a_1\wedge b_1,a_3\wedge b_3]$

۸) [redacted] $\max(A,B)=\max([a_1,a_3],[b_1,b_3])=[a_1\vee b_1,a_3\vee b_3]$

مثال : اعداد فازی ذوزنقه‌ای

اگر اعداد A وB با بازه‌های [۲ , ۵]=B و [-۳ , ۷]=A را داشته باشیم، مطلوب است محاسبه‌ی موارد زیر:

۱) A+B

۲) A-B

۳) A×B

۴) A ÷B

۵) A-۱

۶) ۲A

۷) A ∧B

۸) A ∨B

حل

1) $A+B=[-3,7]+[2,5]=[-3+2,7+5]=[-1,12]$

2) $A-B=[-3,7]-[2,5]=[-3-5,7-2]=[-8,5]$

3) $A\times B=[-3,7][2,5]=[(-3\times 2)\wedge(-3\times 5)\wedge(7\times 2)\wedge(7\times 5),(-3\times 2)$

$\vee(-3\times 5)\vee(7\times 2)\vee(7\times 5)]=[(-3\times 5),(7\times 5)]=[-15,35]$

4) $A\div B=[-3,7]\div[2,5]=[\frac{-3}{2}\wedge\frac{-3}{5}\wedge\frac{7}{2}\wedge\frac{7}{5},\frac{-3}{2}\vee\frac{-3}{5}\vee\frac{7}{2}\vee\frac{7}{5}]$

$=[-\frac{3}{2},\frac{7}{2}]$

5) $A^{-1}=[-3,7]^{-1}=[\frac{1}{-3}\wedge\frac{1}{7} \quad , \quad \frac{1}{-3}\vee\frac{1}{7}]=[-\frac{1}{3},\frac{1}{7}]$

6) $2A=2[-3,7]=[2(-3)\wedge 2(7) \quad , \quad 2(-3)\vee 2(7)]=$ [redacted]

7) $A\wedge B=[-3,7]\wedge[2,5]=[-3\wedge 2,7\wedge 5]=[-3,5]$

8) $A\vee B=[-3,7]\vee[2,5]=[-3\vee 2,7\vee 5]=$ [redacted]

۸-۱۰ رابطه‌ی فازی

رابطه‌های فازی، تعمیم طبیعی رابطه‌های معمولی (قطعی) است. [redacted] دو بعدی، یک رابطه فازی در X*Y عبارتست از یک زیر مجموعه‌ی فازی X*Y. به عبارت دیگر [redacted] به صورت X→Y که در آن نگاشت هر عنصر از X به عنصری از Y ، شدت و ضعفی دارد که به صورت اعدا[redacted] [۰,۱] بیان می‌شوند.

مثال رابطه‌ی فازی

کدام یک از رابطه‌های زیر از نوع معمولی (قطعی) و کدام از نوع فازی است؟

الف) مجموعه X و Yهایی از مجموعه‌ی اعداد حقیقی (R) که جمعشان برابر ۳ باشد (A).

ب) مجموعه X وYهایی از مجموعه‌ی اعداد حقیقی (R) که جمعشان در حدود ۳ باشد (B).

حل

رابطه‌ی الف قطعی است و شکل ریاضی آن به صورت زیراست:

$$A=\{(x,y)|x,y\in R \quad , \quad x+y=3\}$$

رابطه‌ی ب از نوع فازی است زیرا«در حدود ۳» دقیق نیست ومی‌تواند برای نمونه به صورت زیر تعریف شود:

$$\mu_B(x,y)=\frac{1}{1+(x+y-3)} \quad , \quad x,y\in R$$

برای نمونه در رابطه‌ی الف زوج (۱,۴-) به‌طور قطع جزء مجموعه‌ی A است، ولی زوج (۰,۵) جزء مجموعه‌ی A نیست. ولی در رابطه‌ی B زوج (۱,۴-) به‌طور کامل جزء مجموعه‌ی B است (زیرا درجه‌ی عضویت آن ۱ می‌شود)، ولی زوج (۰,۵) با درجه‌ی عضویت $\frac{1}{3}$ جزء مجموعه‌ی B است.

مثال [redacted] ازی

فرض [redacted] رابطه‌ی فازی آن به‌صورت «x به‌صورت قابل توجهی بزرگ‌تر از y» و تابع عضویت آن به صورت زیر [redacted]:

$$\mu_R(x,y)=\begin{cases}0 & , \quad x\le y\\ \frac{x-y}{5y} & , \quad y<x\le 5y\\ 1 & , \quad x>5y\end{cases}$$

اگر y=۱۰ باشد، درجه‌ی عضویت [redacted] ازای x=۱۷ و x=۷۰ حساب کنید.

حل

$10<17\le 50$ است بنابراین از ضابطه‌ی دوم [redacted]

μ_R [redacted] $=\frac{7}{50}$

$70>50$ است بنابراین طبق ضابطه‌ی سوم:

$$\mu_R(70,10)=1$$